

Intégration numérique de modèles cosmologiques

Laurent Zimmermann

6 janvier 2003

1 Introduction

Lors du stage d'astronomie de *Jeunesse et science* (<http://www.jeunesse-et-science.be>) qui s'est déroulé du 26 au 30 décembre 2002, les stagiaires de 5^e et de 6^e année ont eu l'occasion de suivre un exposé d'introduction à la cosmologie et de calculer l'évolution de l'expansion de l'univers, afin, notamment, de déterminer l'âge de l'univers prévu par différents modèles. En particulier, le modèle standard de Einstein-de Sitter et le « nouveau modèle standard » avec constante cosmologique non nulle ont été traités.

2 Équation simplifiée du modèle

Les équations d'évolution de l'univers (équations de Friedmann-Lemaître) ont été établies sur la base de la théorie newtonienne de la gravitation, les termes relativistes (constante cosmologique) ayant été introduits de manière intuitive. Le raisonnement classique a permis d'établir en premier lieu l'équation :

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{\rho_{m_0}}{R}\right] + k.$$

Le principe d'indétermination de Heisenberg a ensuite été introduit, afin de rendre concevable la possibilité que l'énergie et la masse volumique du vide puissent être non nulles. Ceci a permis de compléter l'équation avec la contribution de la « masse volumique du vide » pour obtenir finalement l'équation

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{\rho_{m_0}}{R} + \rho_v R^2\right] + k.$$

La constante de Hubble H se calcule par

$$H = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt}.$$

Le rôle du rayonnement n'a pas été pris en ligne de compte.

3 Paramètres du modèle

L'intégration numérique de l'équation s'est fondée sur les données suivantes :

- ★ H_0 : constante de Hubble ;
- ★ Ω_m : densité de matière ;
- ★ Ω_v : densité du vide ;
- ★ $k = 0$, ce qui nécessite un choix des densités tel que $\Omega_m + \Omega_v = 1$.

Les masses volumiques de la matière et du vide sont exprimées ici en fonction de la masse volumique critique (ρ_c) et des densités Ω ($\rho = \Omega\rho_c$) :

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}.$$

La valeur choisie pour la constante de Hubble est de $65 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}$. La masse volumique critique qui en découle vaut $7,939 \times 10^{-27} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

4 Méthode de résolution

La méthode utilisée pour intégrer l'équation numériquement est la plus simple qui soit : le quotient différentiel a été considéré comme celui de deux variations petites, mais finies :

$$\frac{dR}{dt} \approx \frac{\Delta R}{\Delta t},$$

transformant ainsi l'équation différentielle en une équation ordinaire permettant de calculer la variation de R (soit ΔR) au cours d'une durée Δt arbitraire, quoique brève par rapport à l'échelle temporelle des variations. Ainsi, l'équation utilisée est :

$$\Delta R = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\rho_{m0}}{R} + \rho_v R^2 \right)} \Delta t.$$

Le seul point quelque peu délicat réside dans un choix judicieux du pas d'intégration, Δt . Trop grand, il entraîne des inexacitudes de la solution calculée ; trop petit, il allonge inutilement le nombre de calculs. À noter qu'une valeur positive de Δt permet d'explorer le futur, tandis qu'une valeur négative permet de remonter dans le passé, jusqu'au *big bang* lui-même ! Le choix initial de 0,1 milliard d'année s'est révélé un peu trop grand, surtout pour pouvoir remonter aux premiers instants ; des essais réalisés après le stage semblent indiquer qu'un pas au moins dix fois plus petit est préférable. L'origine de l'intégration $t = 0$ correspond à l'époque actuelle, avec $R_0 = 1$.

Les stagiaires ont commencé l'intégration à l'aide de calculatrices. Après quelques pas, un programme en C++ a été écrit afin de parvenir plus rapidement au *big bang* ou, en tout cas, à une manifestation significative de l'évolution du facteur d'échelle R .

5 Modèle standard

Ce modèle correspond à un univers purement matériel ($\rho_v = 0$), donc à constante cosmologique nulle, dans lequel la masse volumique est égale à la masse volumique critique ($\Omega_m = 1, \rho = \rho_c$). Il est connu sous le nom de *modèle d'Einstein-de Sitter* et s'est imposé comme le plus plausible, jusqu'à il y a peu.

5.1 Résultats

Le tableau I ci-dessous rassemble et résume en une seule liste les résultats des calculs dans le passé et dans le futur. Le pas d'intégration a été de 0,001 milliard d'années, mais les valeurs ne sont données que tous les 0,5 milliards d'années.

D'après ce modèle, on constate que l'âge de l'univers (durée écoulée depuis le *big bang* jusqu'à présent) ne serait que de dix milliards d'années environ. Or, on sait que les amas globulaires de la Galaxie atteignent des âges voisins de quatorze milliards d'années. . .

6 Nouveau modèle standard ?

Des campagnes d'observation de supernovae (SN Ia) lointaines en 1998 semblent montrer que l'expansion de l'univers ne serait pas décélérée, ainsi que l'imposerait la gravitation. Cette éventualité indiquerait que la constante cosmologique initialement introduite par Einstein ne serait en définitive pas égale à zéro, ainsi qu'on le suppose dans le modèle standard. L'interprétation physique de ce terme lui fait jouer le rôle d'une densité d'énergie (donc de masse, puisque $E = mc^2$).

Les chercheurs déduisent de leurs observations que l'univers serait caractérisé par les paramètres $\Omega_m = 0,3$ et $\Omega_v = 0,7$. Les masses volumiques de la matière et du vide vaudraient alors respectivement $2,382 \times 10^{-27} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $5,557 \times 10^{-27} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Remarquons que la densité totale $\Omega_m + \Omega_v$ est encore égale à 1.

6.1 Résultats

Le tableau II concerne ce dernier modèle. Le pas d'intégration a aussi été de 0,001 milliard d'années et les valeurs ne sont également données que tous les 0,5 milliards d'années.

Ce modèle donne à l'univers un âge d'un peu plus de quatorze milliards d'années, tout juste compatible avec celui des amas globulaires. On note également que l'expansion est accélérée dans le futur.

TAB. 1 – Modèle standard.

t (Gyr)	R	H (km·s ⁻¹ ·Mpc ⁻¹)	t (Gyr)	R	H (km·s ⁻¹ ·Mpc ⁻¹)
+10,0	1,586	32,5	0,0	1,000	65,0
+9,5	1,559	33,4	-0,5	0,966	68,4
+9,0	1,533	34,3	-1,0	0,932	72,2
+8,5	1,506	35,2	-1,5	0,898	76,4
+8,0	1,478	36,2	-2,0	0,862	81,2
+7,5	1,451	37,2	-2,5	0,826	86,6
+7,0	1,423	38,3	-3,0	0,789	92,7
+6,5	1,395	39,4	-3,5	0,751	99,8
+6,0	1,367	40,7	-4,0	0,712	108,1
+5,5	1,338	42,0	-4,5	0,672	117,9
+5,0	1,310	43,4	-5,0	0,631	129,6
+4,5	1,280	44,9	-5,5	0,589	143,9
+4,0	1,251	46,5	-6,0	0,544	161,8
+3,5	1,221	48,2	-6,5	0,498	184,7
+3,0	1,191	50,0	-7,0	0,450	215,2
+2,5	1,160	52,0	-7,5	0,399	257,7
+2,0	1,129	54,2	-8,0	0,345	321,2
+1,5	1,097	56,5	-8,5	0,285	426,2
+1,0	1,065	59,1	-9,0	0,219	633,2
+0,5	1,033	61,9	-9,5	0,141	1230,8
0,0	1,000	65,0	-10,0	0,021	21641,0

TAB. 2 – Nouveau modèle standard.

t (Gyr)	R	H (km·s ⁻¹ ·Mpc ⁻¹)	t (Gyr)	R	H (km·s ⁻¹ ·Mpc ⁻¹)
+10,0	1,835	56,2	0,0	1,000	65,0
+9,5	1,783	56,4	-0,5	0,967	66,0
+9,0	1,732	56,6	-1,0	0,935	67,2
+8,5	1,683	56,8	-1,5	0,903	68,4
+8,0	1,634	57,0	-2,0	0,872	69,8
+7,5	1,587	57,2	-2,5	0,841	71,4
+7,0	1,541	57,5	-3,0	0,810	73,1
+6,5	1,497	57,8	-3,5	0,780	75,0
+6,0	1,453	58,1	-4,0	0,750	77,2
+5,5	1,410	58,4	-4,5	0,721	79,6
+5,0	1,369	58,7	-5,0	0,692	82,4
+4,5	1,328	59,1	-5,5	0,663	85,5
+4,0	1,288	59,6	-6,0	0,634	89,1
+3,5	1,250	60,1	-6,5	0,605	93,2
+3,0	1,212	60,6	-7,0	0,576	97,9
+2,5	1,175	61,2	-7,5	0,547	103,4
+2,0	1,138	61,8	-8,0	0,518	109,9
+1,5	1,103	62,5	-8,5	0,489	117,5
+1,0	1,068	63,2	-9,0	0,459	126,7
+0,5	1,034	64,1	-9,5	0,429	137,8
0,0	1,000	65,0	-10,0	0,399	151,5
			-10,5	0,367	168,8
			-11,0	0,335	191,3
			-11,5	0,302	221,6
			-12,0	0,267	264,2
			-12,5	0,229	328,4
			-13,0	0,189	435,8
			-13,5	0,144	651,0
			-14,0	0,091	1294,5
			-14,5	0,004	141331,4